La mesure en sciences expérimentales

Dans cette fiche, nous allons parler de mesure en physique. Les principes de cette fiche doivent être compris, appris et mis en pratique en TP. Ils peuvent aussi faire l'objet de questions aux oraux comme aux écrits des concours.
Il y a deux conditions essentielles pour que la mesure d'une grandeur physique ait un sens :

— **Pouvoir donner une unité :** une mesure ne veux rien dire si elle n'a pas d'unité (sauf pour le comptage). Lorsqu'on attribue une unité à une mesure, on compare cette mesure à une valeur de référence. Pour mesurer une distance par exemple, nous utilisons l'unité du mètre fixée par des valeurs de référence que sont la vitesse de la lumière et la seconde.

— **Pouvoir décrire l'incertitude associée à cette mesure :** prenons comme exemple la mesure de la distance d'une étape du tour de France. Selon l'appareil utilisé (GPS ou compteur de vitesse), les valeurs sont différentes. Laquelle croire ? Aucune tant que la variabilité du processus de mesure n'est pas pris en compte : cette variabilité peut provenir du type d'appareil, du type de routes, du gonflage des pneus pour un compteur, etc.. Les conditions expérimentales jouent sur la mesure et sa variabilité (incertitude de mesure), d'où l'intérêt de connaître le protocole d'une mesure. Dire que la distance d'une étape est de 100 km sans donner d'autres indications est insuffisant. Une façon de redonner du sens à un chiffre seul est de parler de chiffre significatif, notion qui découle directement de la variabilité d'une mesure.

Il faut bien comprendre que la mesure en physique ne permet pas d'accéder à la valeur réelle d'une grandeur (à supposer qu'elle existe et/ou qu'elle ait un sens). Une mesure ne donne pas accès une valeur exacte comme on l'entend au sens mathématique mais plutôt à un ensemble de valeurs possibles. En accumulant les mesures faites avec des appareils différents, des méthodes différentes, des expérimentateurs différents, etc. notre confiance grandit sur la position de la valeur réelle dans cet ensemble.

Mesure et observation

Définition

La mesure d'une grandeur X est l'ensemble des observations de cette grandeur. Chaque observation permet d'obtenir une valeur associée à la grandeur. On note x_i la i-ème observation de la grandeur X et $\overline{x}$ la moyenne de toutes les valeurs obtenues.

Incertitudes-type

La notion d'incertitude permet de traduire l'importance de l'erreur aléatoire commise. Deux points essentiels à retenir :

— **L'incertitude est toujours positive contrairement à l'erreur.**

— **Une mesure d'incertitude ne permet pas d'estimer une erreur systématique.**

Définition

Une **incertitude-type** associée à une observation unique exprime la variabilité potentielle de cette observation. Elle quantifie les fluctuations typiques d'une observation à l'autre.
L'incertitude de **type A** correspond aux fluctuations rencontrées sur une série d'observations.
L'incertitude de **type B** correspond aux fluctuations potentielles d'une observation lors de l'utilisation d'un appareil de mesure.
Mesurande : grandeur que l'on veut mesurer dans des conditions de mesure précisées.
Erreur systématique : composante de l'erreur de mesure qui, dans des mesurages répétés, demeure constante ou varie de façon prévisible

Remarque : Les incertitudes de type A et B peuvent se retrouver dans une même mesure. Par exemple : faire plusieurs fois l'observation de la valeur d'une masse sur une balance numérique. La valeur lue sur l'affichage numérique porte une incertitude de type B tandis que le fait de répeter l'expérience ne donnera pas toujours le même résultat (position de la masse sur la balance, inclinaison de la balance par rapport à l'horizontale, mauvaise tare, température et pression de la pièce, etc.).

Erreur systématique

Exercice

Un cycliste mesure à l'aide de son compteur compte-tours une distance de 100 km pour une étape du tour de France. il ré-effectue la même étape mais avec un vélo dégonflé tel que le rayon de sa roue soit 1% plus petit qu'à l'origine. Quelle distance mesure-t'il ? Quel est ce type d'erreur ?

Exemple

En reprenant l'exemple de la mesure de la distance d'une étape du tour de France, une erreur systématique correspond à mesurer constamment une plus grande ou plus petite distance que la distance réelle. Imaginons que le coureur soit suivi par GPS, si sa localisation est faite toutes les 10 minutes sur des routes sinueuses, le calcul de la distance sur cette période ne prendra pas en compte les virages qu'aura fait le cycliste. La distance totale sera donc estimée à la baisse.

Remarque : L'erreur systématique est une erreur qu'il n'est pas possible de déterminer expérimentalement sans connaître la valeur vraie. Il est possible de l'estimer ou de réaliser une expérience qui permet de s'en affranchir.

Erreur aléatoire et/ou systématique

Rien n'empêche d'avoir une combinaison des erreurs précédentes dans une même mesure. Si nous reprenons l'exemple du cycliste sur une route sinueuse, il trouvera des distances plus petites (due au lent taux de rafraichissement de sa localisation) et différent d'un coup à l'autre s'il effectue plusieurs fois la même étape (due aux endroits où le cycliste est localisé). L'exercice 1 permet de traiter ce sujet.

Incertitude de type A

Propriété

L'incertitude-type de type A d'**une seule** observation, notée $u(X)$, est estimé à partir de la variance d'une série d'observations du mesurande X. Pour N observations :

$$u(X) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}{N-1}}$$

où la i-ème observation de la grandeur X vaut x_i et la valeur moyenne de la série d'observation de X vaut $\overline{x}$.

Exemple

En reprenant l'exemple de la mesure de la distance d'une étape du tour de France, si un cycliste effectue plusieurs fois la même étape, il risque de ne pas trouver exactement la même valeur alors qu'il utilise un unique appareil de mesure. Une des causes possible est le fait qu'il prenne parfois l'intérieur et parfois l'extérieur d'un même virage : sa distance parcourue peut en être augmentée ou diminuée.
Il peut mesurer par exemple une distance d $=$ 100,0 km, puis d $=$ 100,1 km puis 99,9 km, etc. En faisant plusieurs fois le même parcours, il obtiendra par exemple $u(d) = 0,1$ km et $\overline{d} =$ 100,0 km. Comment interpréter ce résultat ? En moyenne le parcours est de 100,0 km. S'il effectue de nouveau le parcours, il aura de grande chances (95 %) de tomber sur une valeur comprise entre $100,0 - 2u(d)$ km et $100,0 + 2u(d)$.

Propriété

L'incertitude-type de type A d'**sur la moyenne d'une série de N** observation est égale à l'incertitude-type d'une observation divisée par la racine du nombre d'observations :

$$u(\overline{x}) = \frac{u(X)}{\sqrt{N}}$$

Exemple

En mesurant d $=$ 100,0 km puis d $=$ 100,1 km puis 99,9 km, nous obtenons $u(d) = 0,12$ km et $u(\overline{d}) = 0,1/\sqrt{3} =$ 0,07 km. La **distance moyenne** est connue avec plus de précision (0,07 km) que la distance qu'enregistre le cycliste lorsqu'il effectue **une fois** son parcours (0,12 km).

Incertitude de type B

Les différentes causes d'erreur

Soit x une grandeur mesurée et $u(x)$ l'incertitude type sur x liée à la mesure, alors $u(x)$ résulte de la composition des incertitudes-type suivantes :

$$u_x^2 = u_c^2 + u_{lec}^2 + u_{spe}^2$$

Où :

— u_c : incertitude type constructeur liée à la classe de l'appareil (qualité).
— u_{lec} : incertitude type de lecture lié à la lecture sur l'instrument (graduations,...).
— u_{spe} : incertitude type spéciale, liée à la difficulté de faire la mesure : pointés, encadrement, non linéarité...

Souvent, une ou plusieurs de ces incertitudes prédominent sur les autres. D'où la nécessité d'estimer rapidement les ordres de grandeurs des incertitudes types afin de garder les plus significatives.

Résolution et tolérance

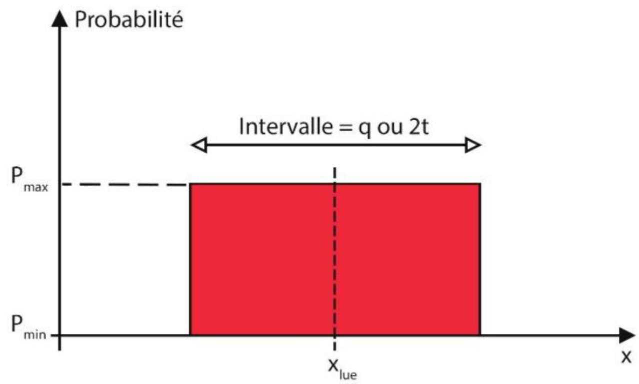
On notera q **la résolution** de l'instrument (plus petite graduation d'un appareil analogique, valeur de quantification d'un instrument numérique.... La valeur x d'une observation vérifiera :

$$x \in \left[x_{\text{lue}} - \frac{q}{2} ; x_{\text{lue}} + \frac{q}{2}\right]$$

La tolérance de l'instrument (liée à la méthode de mesure), que l'on notera t, est telle que :

$$x \in [x_{\text{lue}} - t ; x_{\text{lue}} + t]$$

Dans les deux cas, le constructeur postule que la variabilité des valeurs observées lors d'une mesure suit une loi uniforme dans cet intervalle, appelée loi de distribution "carrée".



Cela signifie que toutes les valeurs de l'intervalle sont équiprobables. Dans ce cas $q = 2t$. C'est un choix de distribution que nous choisirons mais il existe aussi des distributions non équiprobables qui donnent plus de probabilité d'obtenir la valeur centrale de l'intervalle : distribution triangulaire, distribution normale...
A l'aide d'un calcul de variance sur la distribution on peut montrer que l'incertitude-type liée à la distribution «carrée» s'écrit :

$$u_c = \frac{\text{intervalle}}{\sqrt{12}} \Rightarrow \begin{cases} u_c = \frac{q}{\sqrt{12}} \\ ou \\ u_c = \frac{2t}{\sqrt{12}} = \frac{t}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Incertitude type de pointés

Souvent on mesure une grandeur par encadrement (pointés en optique, largeur de bande passante...) à l'aide des valeurs extrêmales $x_{\max}$ et $x_{\min}$ tel que : $X = \frac{x_{\max}+x_{\min}}{2}$
L'incertitude $u_{\text{spé}}$ liée à cet encadrement est à rajouter aux incertitudes « constructeur », et de lecture et peut être très supérieures à celles-ci. L'incertitude se calcule à l'aide de la résolution $x_{\max} - x_{\min}$ par la formule suivante :

$$\text{Si } x = \frac{x_{\max}+x_{\min}}{2} \Rightarrow u_{\text{spé}} = u_{\text{pointé}} = \frac{x_{\max}-x_{\min}}{\sqrt{12}}$$

Incertitude type de lecture

Appareils à graduation

Lorsqu'on mesure une position sur un banc prismatique, un vernier, un thermomètre à colonne...l'incertitude de lecture dépend de la résolution de l'appareil. Si on note q la résolution de l'appareil à graduations, alors :

$$u_{\text{lec}} = \frac{q}{\sqrt{12}}$$

Quand on mesure un écart entre deux positions x_1 et x_2 il faut tenir compte de l'incertitude sur les deux positions d'où : $u_{lec}^2 = u_{lec1}^2 + u_{lec2}^2$. Souvent l'incertitude sur les deux positions est identique d'où : $u_{lec}^2 = 2u_{lec1}^2 = \dfrac{q^2}{6}$.
L'incertitude de lecture dans le cas d'un écart s'écrit donc :

$$u_{lec} = \sqrt{2}\frac{q}{\sqrt{12}} \Rightarrow u_{lec} = \frac{q}{\sqrt{6}}$$

Mesures automatiques (Oscilloscope numérique, carte Sysam, Caliens, multimètre numérique...)
Lorsqu'on effectue des mesures directes avec ces appareils, on doit tenir compte d'une incertitude de lecture. Si on note q l'unité de résolution U.R. du multimètre numérique (plus petite valeur affichée), on a alors :

$$u_{\text{lec}} = \frac{q}{\sqrt{12}} = \frac{U.R}{\sqrt{12}}$$

Dans ce cas on n'aura pas d'incertitude de pointé mais on aura une incertitude « constructeur » à rajouter.

Mesures à l'aide de curseurs (Oscilloscope numérique, carte Sysam, Caliens...)
On se retrouve dans la même situation que l'appareil à graduation :
L'incertitude de lecture à l'aide de curseur dans le cas :

- D'une unique mesure (amplitude par exemple) : $u_{\text{lec}} = \frac{q}{\sqrt{12}} = \frac{U.R.}{2\sqrt{3}}$
- D'une mesure par différence (période par exemple) : $u_{lec} = \frac{q}{\sqrt{6}} = \frac{U.R.}{\sqrt{6}}$

Incertitude type « constructeur»

Présentation

- Le constructeur fournit l'incertitude-type. Le constructeur a évalué cette incertitude à partir d'un grand nombre de mesures par une technique éprouvée. On donc directement u_c.
- Le constructeur fournit la résolution. Par exemple, sur une balance on peut lire que la résolution de l'appareil est de $\mathrm{q} = 0,01\ \mathrm{g}$. Cela signifie que l'appareil arrondi au 2ème chiffre après la virgule. La graduation d'un instrument de mesure analogique ou l'afficheur d'un appareil numérique sont des sources d'incertitudes. Si la résolution du dispositif de lecture est q, la valeur «vraie » peut se situer avec une égale probabilité à n'importe quel endroit de l'intervalle : $\left[x_{\text{lue}} - \frac{q}{2}, x_{\text{lue}} + \frac{q}{2}\right]$. Dans ce cas : $u_c = \frac{q}{\sqrt{12}}$.
- Le constructeur fournit la tolérance. L'erreur maximale tolérée (notée sur les instruments de mesure sous la forme $\pm \mathrm{t}$) donne les limites extrêmes de variation de l'indication obtenue d'un instrument de mesure. La valeur «vraie» de la grandeur peut se situer avec une égale probabilité dans l'intervalle $[x_{\text{lue}} - t; x_{\text{lue}} + t]$. Dans ce cas : $u_c = \frac{t}{\sqrt{3}}$.

L'incertitude constructeur peut s'évaluer à l'aide :

- De la résolution q : $u_c = \frac{q}{\sqrt{12}}$
- De la tolérance t : $u_c = \frac{t}{\sqrt{3}}$.

Appareils à graduation
En général, l'incertitude « constructeur» est négligeable par rapport aux deux autres incertitudes. Dans le cas où le constructeur fourni une des données mentionnées ci-dessus il faudra penser à l'évaluer.

Multimètre numérique (et RLC mètre)
Les appareils qu'on utilise au lycée sont très proches de ceux employés dans le mode professionnel ainsi le calcul de l'incertitude constructeur est très détaillé. Par exemple, la notice du Fluke 287 fournit ci-dessous propose une estimation de l'incertitude à l'aide de deux coefficients (les RLC mètre souvent à trois) a et b :

$$t = a\% \times \text{ Valeur lue} + b \times U.R. \Rightarrow u_c = \frac{a\% \times \text{ Valeur lue} + b \times U.R.}{\sqrt{3}}$$

Fonction	Plage	Résolution	Précision 20 à 45 Hz	46 à 65 Hz	65 Hz à 10 kHz	10 à 20 kHz	20 à 100 kHz]
AC mV	50mV	$0,001\text{mV}$	1,5%+60	0,3%+25	0,4%+25	$0,7\% + 40$	$3,5\% + 40$
	500 mV	$0,01\text{mV}$	$1,5\% + 60$	0,3%+25	$0,4\% + 25$	$0,7\% + 40$	$3,5\% + 40$
AC V	5 V	0,0001 V	$1,5\% + 60$	$0,3\% + 25$	$0,6\% + 25$	1,5%+40	$3,5\% + 40$
	50 V	$0,001$ V	$1,5\% + 60$	$0,3\% + 25$	$0,4\% + 25$	$0,7\% + 40$	3,5%+40
	500 V	0,01 V	$1,5\% + 60$	0,3%+25	$0,4\% + 25$	Non spéc.	Non spéc.
	1000 V	$0,1$ V	$1,5\% + 60$	0,3%+25	$0,4\% + 25$	Non spéc.	Non spéc.
dBV	-70 à -62 dB	$0,01$ dB	3 dB	$1,5$ dB	2 dB	2 dB	3 dB
	-62 à -52 dB	$0,01$ dB	$1,5$ dB	$1,0$ dB	1 dB	1 dB	2 dB
	-52 à -6 dB	$0,01$ dB	$0,2$ dB	$0,1$ dB	$0,1$ dB	$0,2$ dB	$0,8$ dB
	-6 à $+34$ dB	$0,01$ dB	$0,2$ dB	$0,1$ dB	$0,1$ dB	0,2 dB	$0,8$ dB
	34 à 60 dB	$0,01dB$	$0,2$ dB	$0,1$ dB	$0,1$ dB	Non spéc.	Non spéc.
Filtre passe-bas			$2\% + 80$	$2\% + 40$	$2\% + 10$ $-6\% - 60$	Non spéc.	Non spéc.
$\text{LoZ}\,\tilde{V}$	1000 V	$0,1$ V	$2\% + 80$	$2\% + 40$	$2\% + 40$	Non spéc.	Non spéc.

Si on mesure $1,2345$ V à 1 kHz alors : $t = 0,6\% \times 1,2345 + 25 \times 0,0001 = 0,0099$ V $\Rightarrow u_c = 0,0057$. On verra, dans les exemples le nombre de chiffres significatifs cohérents à écrire pour les incertitudes.

Oscilloscope numérique (Carte Sysam, Caliens...)

— Mesures de tension
  Dans ce cas l'incertitude «constructeur » peut se déterminer à l'aide des caractéristiques de conversion numérique de l'oscilloscope. On définit le quantum comme la résolution verticale liée à la CAN d'où : $u_c = \frac{q}{\sqrt{12}}$
  Le quantum peut se déterminer suivant le nombre de bits ayant servi au codage :

$$q = \frac{\Delta x_{\max}}{2^N} \text{ où } \begin{cases} \Delta x_{\max} = \text{ plage des valeurs de } x \\ N = \text{ nombre de bits } : 8 \text{ pour l'oscilloscope } 12 \text{ pour Sysam - SP5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_c = \frac{q}{\sqrt{12}} \text{ où } q = \frac{\Delta x_{\max}}{2^8} \text{ pour l'oscilloscope numérique}$$

— Mesures de fréquences
  La tolérance va être déterminer à l'aide du temps d'acquisition τ tel que : $q = \frac{1}{\tau}$

$$\Rightarrow u_c = \frac{q}{\sqrt{12}} \text{ où } q = \frac{1}{\tau}$$

— Mesures de périodes
  La résolution va être déterminer à l'aide de la fréquence d'échantillonnage f_e tel que $q = \frac{1}{f_e}$

$$\Rightarrow u_c = \frac{q}{\sqrt{12}} \text{ où } q = \frac{1}{f_e}$$

— Mesures de distance à l'aide de Caliens
  La tolérance va être déterminer à l'aide de la taille du pixel du capteur CCD : $a = 14\mu\text{m}$.

$$\Rightarrow u_c = \frac{q}{\sqrt{12}} \text{ où } q = a$$

Composition des incertitudes

Les incertitudes peuvent provenir de plusieurs sources (type A et type B, plusieurs appareils de mesure, etc.). Pour estimer l'erreur finale il faut pouvoir prendre en compte toutes les incertitudes.

Propriété

Soit $c = \alpha a + \beta b$, où a (respectivement b) est une valeur mesurée dont l'incertitude est notée $u(a)$ (respectivement $u(b)$) et où α et β sont des constantes réelles. L'incertitude sur c notée $u(c)$ vérifie :

$$u(c) \leq |\alpha|u(a) + |\beta|u(b)$$

Propriété

Soit $c = a \times b^{\alpha}$, où a (respectivement b) est une valeur mesurée dont l'incertitude est notée $u(a)$ (respectivement $u(b)$) et où α est une constante réelle. L'incertitude sur c notée $u(c)$ vérifie :

$$\frac{u(c)}{c} \leq \frac{u(a)}{a} + |\alpha| \times \frac{u(b)}{b}$$

Remarques :

1. Ces deux relations permettent de majorer l'incertitude.
2. Pour une meilleur estimation, il est possible d'utiliser la loi de propagation des erreurs.

Propriété

Pour une grandeur f dépendant de plusieurs variables $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, l'incertitude de mesure $u(f)$ dépend des incertitudes $u(x_i)$ des mesures des variables x_i pour $i \in [1, n]$ selon la formule ci-dessous :

$$u(f) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u(x_i)^2}$$

Propriété

Mesurande	Grandeur(s) mesurée(s)	Constante(s)	Relation	Incertitude-type du mesurande
X	Y	λ	$X = \lambda Y$	$u(X) = \|\lambda\| u(Y)$
X	Y, Z	$\emptyset$	$X = Y \pm Z$	$u(X) = \sqrt{u(Y)^2 + u(Z)^2}$
X	Y, Z	$\emptyset$	$X = Y/Z$ ou $X = Y \times Z$	$\frac{u(X)}{\|X\|} = \sqrt{\left(\frac{u(Y)}{Y}\right)^2 + \left(\frac{u(Z)}{Z}\right)^2}$
X	Y, Z	λ, a, b	$X = \lambda Y^a Z^b$	$\frac{u(X)}{\|X\|} = \sqrt{a^2 \left(\frac{u(Y)}{Y}\right)^2 + b^2 \left(\frac{u(Z)}{Z}\right)^2}$

Exemple

Nous cherchons à mesurer la surface d'une feuille A4. Notons L la longueur, ℓ la largeur, S la surface. Le mesurande est la surface, c'est ce que l'on cherche à mesurer. Nous devons pour cela utiliser une règle, mesurer les côtés de cette feuille et appliquer la formule $S = L \times \ell$. Nous pouvons déterminer l'incertitude-type sur S à partir de l'incertitude-type sur L et ℓ en appliquant la formule $\frac{u(S)}{S} = \sqrt{\left(\frac{u(\ell)}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{u(L)}{L}\right)^2}$. Nous prenons une règle classique pour effectuer notre mesure : l'incertitude-type de cet outil vaut environ une demi-graduation [a]. Nous obtenons

$$\frac{u(S)}{S} = \sqrt{\left(\frac{0,05}{21,0}\right)^2 + \left(\frac{0,05}{29,7}\right)^2} = 0,0029$$

soit une incertitude-type d'environ 0,3% sur la valeur de S. Comme S = 21,0 cm × 29,7 cm = 623,7 cm^2, l'incertitude-type sur S vérifie : $u(S) = 0,003 \times 623,7 \simeq$ 1,9 cm^2

[a] On prendra donc $u(\ell) = 0,5$ mm et $u(L) = 0,5$ mm. En réalité, l'incertitude pour ce type d'outil est légèrement plus faible et vaut $1/\sqrt{12} \simeq 0,3$ mm.

Remarques :

— Nous supposons implicitement que la feuille est bien rectangulaire ! Si elle ne l'est pas, nous commettons une "erreur systématique" : le résultat de la mesure peut être en désaccord avec la réalité (écart normalisé ou "z-score" supérieur à 2).

— L'incertitude d'une grandeur divisée par la valeur de cette grandeur donne un chiffre qui peut être exprimé en pour cent. Le calcul s'interprète comme ceci : $\%\ \text{incertitude sur}\ S = \sqrt{(\%\ \text{incertitude sur}\ \ell)^2 + (\%\ \text{incertitude sur}\ L)^2}$.

Présentation d'un résultat expérimental à "deux sigma" : incertitude élargie

Convention

L'estimation notée x de la valeur vraie notée X obtenue après des mesures expérimentales est notée

$$x = \bar{x} \pm 2u(x),$$

où $\bar{x}$ est la meilleure estimation de la valeur vraie et $u(x)$ est l'incertitude type associée.

Remarques :

1. La détermination de la meilleure estimation $\bar{x}$ et de l'incertitude $u(x)$ permet d'encadrer la valeur vraie : $X \in [\bar{x} - 2u(x), \bar{x} + 2u(x)]$. Si X ne se trouve pas dans cet intervalle il faut probablement ré-estimer les incertitudes ou l'erreur systématique.
2. Avec cette notation, si l'incertitude de mesure est purement aléatoire et que l'estimation $\bar{x}$ correspond à un nombre infini de mesures alors $\bar{x} = X$ de manière exacte.
3. $2u(x)$ est appelée **incertitude élargie** : c'est l'incertitude donnée avec un niveau de confiance ici de 95% (voir acceptabilité d'un résultat).

Définition

Soit $\bar{x}$ la meilleure estimation de la valeur vraie et $u(x)$ l'incertitude associée.

Acceptabilité d'un résultat

Une fois la valeur mesurée et son intervalle d'incertitude obtenus, on les compare à la valeur de référence (soit une valeur théorique, soit une valeur de référence expérimentale appelée valeur tabulée). Il arrive que l'intervalle ne contienne pas la valeur de référence, on peut calculer la probabilité qu'un point de mesure tombe ou non dans l'intervalle d'incertitude en supposant une distribution de probabilité (on ne s'amusera pas à faire ça).

$\alpha u(x), \alpha =$	0	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$	3	$3,5$	4
$P(\%)$	0	$38,3$	$68,3$	$86,6$	$95,5$	$98,8$	$99,7$	$99,95$	$99,99$

TABLE 1 – Probabilité qu'un point tiré aléatoirement suivant une probabilité gaussienne tombe dans l'intervalle $[\bar{x} - \alpha u(x), \bar{x} + \alpha u(x)]$

Ainsi si l'écart entre la mesure et la valeur tabulée dépasse $2u(x)$ on commencera à sérieusement douter de notre mesure. Dans ce cas il faudra réfléchir aux éventuelles erreurs systématiques qui auraient pu se glisser dans notre expérience.

Chiffres significatifs

Définition

Premier chiffre incertain : chiffre qui apparaît dans l'estimation de la valeur vraie à la même puissance que **l'ordre de grandeur** de l'incertitude de mesure.
Chiffres significatifs : chiffres regroupant les chiffres incertains et ceux connus avec certitude (après avoir simplifié les zéros inutiles).

Exemple

Soit une mesure donnant $x = 0150,421 \pm 0,035$. Il y a 5 chiffres significatifs, 4 connus avec précision (dans l'ordre : 1, 5, 0 et 4) et 2 chiffre incertains (2 et 1). Le premier chiffre incertain est 2 car il apparaît à la même puissance que l'ordre de grandeur de l'incertitude ($0,035 \simeq 10^{-2}$). Le premier zéro est inutile.

Convention

Simplifier l'écriture d'une mesure
Pour simplifier l'écriture d'une mesure, il est possible de ne pas écrire l'incertitude associée à celle-ci. Dans ce cas, cette écriture suppose que l'incertitude de mesure est du même ordre de grandeur que celui du premier chiffre incertain.

Exemple

Soit une mesure donnant $x = 150,421 \pm 0,035$. L'écriture simplifiée serait $x = 150,42$ car l'ordre de grandeur de l'incertitude est de 10^{-2}. Autrement dit, l'écriture $x = 150,42$ suppose une incertitude de mesure $u(x)$ de l'ordre de grandeur du premier chiffre incertain, soit 10^{-2}.

Remarque : Vous l'aurez compris, en science, l'écriture d'un résultat expérimental sans barre d'erreur est interdit. Si elle n'est pas explicite, la barre d'erreur est alors implicitement de l'ordre de grandeur du dernier chiffre significatif du résultat considéré.

Exemple

En reprenant l'exemple de la distance d'une étape du tours de France, si le présentateur dit que l'étape fait 100 km, cela veut dire que l'incertitude associée est de l'ordre de grandeur de 1 km.

Propriété

Écriture simplifiée après opération

- Le nombre de chiffres significatifs d'un résultat issu d'une multiplication ou division de deux nombres écrits sous forme simplifiée, est identique à celui du terme du calcul en possédant le moins.
- Le dernier chiffre significatif d'un résultats issu d'une addition ou soustraction de deux nombres écrits sous forme simplifiée, est du même ordre de grandeur que le dernier chiffre significatif de plus grand ordre de grandeur des différents termes de la somme.

Remarque : Cette propriété découle[1] des propriétés 1 et 2, et de la convention de l'écriture simplifiée.

Exercice

Réécrire l'expression numérique de x sous forme simplifiée, puis en donner le nombre de chiffres significatifs :

- $x = 0203,150$
- $x = 20 + 0,23$
- $x = 20 \times 0,23$
- $x = 2,7.10^8$
- $x = 10 - 2,3$
- $x = 1,30 - 0,60$
- $x = 00,002$
- $x = 240000$

1. Plus exactement, ces deux propriétés découlent de la propriété 3 et de la convention de l'écriture simplifiée. Toutefois, les propriétés 1 et 2 sont suffisantes car l'écriture simplifiée nécessite un ordre de grandeur de l'incertitude. Une majoration de l'incertitude convient donc amplement pour cette tâche.