Épreuve de physique - 31 mars 2025

Durée : 4h

— L'usage de la calculatrice est interdit.

— Un résultat d'application numérique **ne doit pas** contenir d'opérations ou de fonctions (fraction, racine, logarithme, etc.) et **sera compté comme faux** s'il en contient.

— Les expressions littérales seront encadrées, et les applications numériques soulignées. **Une application numérique sans unité sera considérée fausse**.

— Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, indiquez le sur votre copie. Vérifiez tout de même que l'erreur ne provient pas de vous (homogénéité, ordre de grandeur, etc.).

1 Effondrement du Soleil

À la fin de sa vie, dans 5 milliards d'années environ, le Soleil s'effondrera en une naine blanche, un astre de forte densité, concentrant la masse du Soleil sur une boule de rayon équivalent au rayon terrestre. On rappelle que le moment d'inertie d'une boule homogène de masse m et de rayon R est $J_\Delta = \frac{2}{5}mR^2$.

1. On suppose que cet effondrement se fait sans perte significative de masse. Montrer que le moment cinétique scalaire du Soleil par rapport à son axe de rotation reste constant au cours de l'effondrement.
2. Exprimer les moments cinétiques scalaires du Soleil, et de la naine blanche. En déduire la période de rotation de la naine blanche.

Données :
Soleil : masse $M_s = 2.10^{30}$ kg, période de rotation $T_s = 1$ mois, rayon $R_s = 7.10^5$ km.
Terre : rayon $R_T = 6400$ km.

2 Javelot en corde - shéng biāo

Le shéng biāo est une arme utilisée dans les arts martiaux chinois. Le principe est de faire tournoyer un javelot au bout d'une corde en maintenant l'autre extrémité avant de la relâcher au moment souhaité. Une technique de lancé est de faire buter la corde contre son pied, son genou ou son coude pendant la rotation : nous allons découvrir quelques aspects de ce type de trajectoires.

Pour modéliser le comportement du javelot nous allons considérer un pendule simple constitué d'une masse ponctuelle m attachée à un fil inextensible de longueur $\ell = OA$ (cf figure). L'angle que fait le pendule avec la verticale sera noté θ et n'est pas représenté sur le schéma. Il est compté positivement dans le sens trigonométrique. Le pendule est lancé depuis un angle α par rapport à la verticale sans vitesse initiale. Une butée est placée à une distance $h = OC = 4\ell/5$ en-dessus du point d'attache du fil, de sorte que le pendule vient heurter la butée s'il oscille.

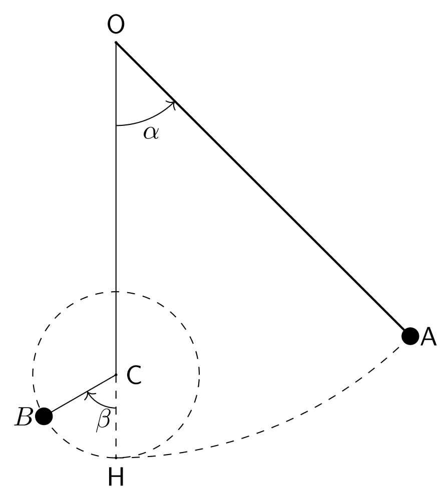
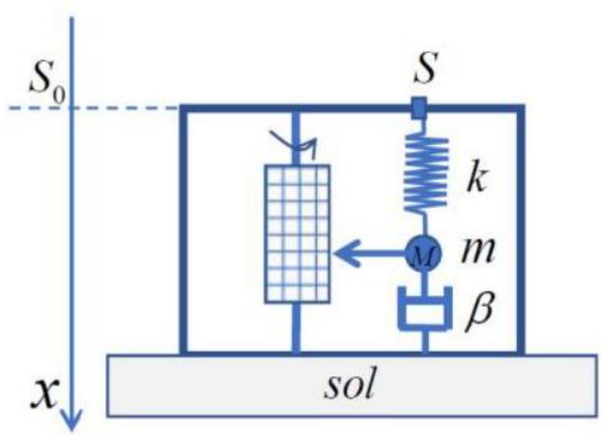


FIGURE 1 – À gauche : dessin d'artiste représentant la manipulation du sheng biao (crédit Erika Shing). À droite : schéma du pendule à butée. La butée est en C, les points A et B sont les positions extrêmes du pendule.

3. Écrire l'expression de l'énergie mécanique du point matériel en fonction des variables θ et $\dot{\theta}$, et des données de l'énoncé. On traitera les cas $\theta > 0$ et $\theta < 0$ séparément et on fixera à 0 l'énergie potentielle de pesanteur de la masse en H.
4. Tracer l'allure de l'énergie potentielle pour $\theta \in [-\pi, \pi]$. Repérer les coordonnées des extremum et préciser la stabilité de ces points.
5. Déduire de la question 4 l'expression de la vitesse en H pour un angle α donné.
6. Remarquer que la vitesse juste avant ou juste après H est identique mais qu'il n'en est pas de même pour la vitesse angulaire et l'accélération. Donner une expression quantifiant ces modification.
7. Déduire de la question 4 une equation reliant α et β en raisonnant à partir des angles accessibles par le système pour une énergie mécanique donnée.
8. Déduire de la question 4 l'expression de l'énergie mécanique nécessaire (mais pas forcément suffisante) pour que la masse puisse s'enrouler autour de C. Remonter à une condition sur la valeur de l'angle α qui le permet et donner la valeur de l'angle (Pour les calculs : arccos$(3/5) = 53°$, arccos$(4/5) = 37°$, arcsin$(4/5) = 53°$, arcsin$(4/5) = 37°$).
9. En utilisant le principe fondamental de la dynamique, écrire les équations du mouvement du pendule en coordonnées polaires pour le cas $\theta < 0$.
10. Déterminer l'expression de la tension T du fil en fonction de θ et $\dot{\theta}$, puis en simplifier l'expression en n'utilisant que la variable θ. On utilisera pour cela l'expression de la vitesse en H obtenue question 5
11. Que doit satisfaire la tension du fil pour que la masse s'enroule autour de la butée ? Déterminer l'expression et la valeur de l'angle α qui satisfait cette condition. Commenter cette valeur au regard de la réponse à la question 8.

3 Principe d'un sismographe

On modélise un sismographe par un pendule élastique vertical dont l'extrémité supérieure S est fixée au boitier de l'instrument, lui-même solidaire du sol. Le pendule est constitué d'un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0, et d'une masse m dont le centre d'inertie sera noté M. La masse est également soumise à une force de frottement visqueux de la forme $-\beta\vec{v}$ (assimilée à l'action d'un piston solidaire du boitier) : dans cette expression, β est une constante et $\vec{v}$ est la vitesse de la masse par rapport à S.



A l'instant initial l'altitude du point S coïncide avec celle d'un point S_0 fixe dans un référentiel $\mathcal{R}_0$ galiléen. On pourra utiliser le repère (S_0, x, y, z) associé à $\mathcal{R}_0$.
L'axe (x) est orienté à la verticale vers le bas. Dans un premier temps on étudie le mouvement du point M en l'absence de perturbation (autrement dit S est immobile dans $\mathcal{R}_0$).
On note X la distance SM et g l'intensité de la pesanteur.

12. Quelle est l'expression X_{eq} de X à l'équilibre ?
13. La masse est lâchée en dehors de sa position d'équilibre. Établir l'équation différentielle de son mouvement, à laquelle obéit la fonction $X(t)$.
14. On pose $Y = X - X_{eq}$. Montrer que l'équation différentielle précédente peut s'écrire sous la forme : $\ddot{Y} + 2\lambda\dot{Y} + \omega_0^2 Y = 0$ où l'on précisera les expressions des constantes λ et ω_0 en fonction de β, k et m.

On étudie maintenant la réaction du système au passage d'une onde sismique modélisée par une oscillation sinusoïdale d'amplitude a constante.
L'abscisse x du point de suspension S dans le référentiel $\mathcal{R}_0$ est $x_S(t) = a\cos(\omega t)$. On note x_M l'abscisse de la masse m dans le référentiel $\mathcal{R}_0$.

15. Quel est le lien entre $\ddot{x}_M, \ddot{x}_S$ et $\ddot{X}$? Quel est le lien entre $\ddot{X}$ et $\ddot{Y}$? Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la masse dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}_0$, et en déduire l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{Y} + 2\lambda\dot{Y} + \omega_0^2 Y = a\omega^2\cos(\omega t)$$

En régime forcé, on pose $Y(t) = A\cos(\omega t + \varphi\ )$, où φ est une constante. D'autre part on introduit la pulsation relative $u = \omega/\omega_0$ et le facteur de qualité $Q = \frac{\omega_0}{2\lambda}$.

16. Montrer que l'amplitude A des oscillations forcées de la masse est donnée par :

$$A = \frac{a}{\sqrt{\left(\frac{1}{u^2} - 1\right)^2 + \frac{1}{Q^2u^2}}}$$

17. Montrer que A est maximale pour une certaine valeur $u_{\max}$ de u que l'on exprimera en fonction de Q.

On mesure

$$u_{\max} = 1,2 = \frac{6}{5}; \quad k = 0,50\ \mathrm{N}\cdot\ \mathrm{m}^{-1} \quad \text{et} \quad m = 200\ \mathrm{g}.$$

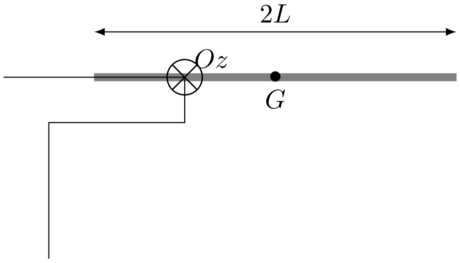
18. En déduire la valeur du facteur de qualité Q et une valeur approximative du coefficient de frottement β.
19. Quelles sont les valeurs de l'amplitude des oscillations de la masse dans les deux cas limites : d'une part, u « 1 et $u > 1$ d'autre part ? Expliquer qualitativement le résultat obtenu dans chaque cas.

On peut considérer une onde sismique réelle comme une superposition d'ondes sinusoïdales de pulsations comprises entre deux valeurs données $\omega_{\min}$ et $\omega_{\max}$. On rappelle que le but d'un sismographe est d'enregistrer le plus fidèlement possible les mouvements verticaux du sol.

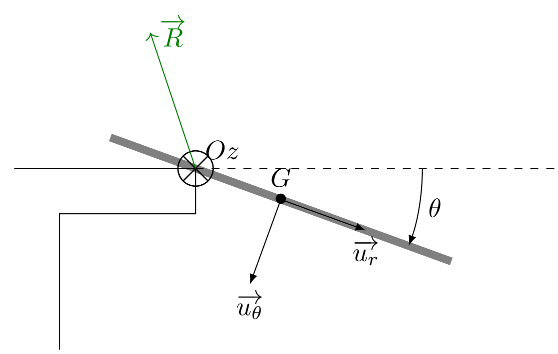
20. Comment faut-il choisir ω_0 par rapport aux valeurs $\omega_{\min}$ et/ou $\omega_{\max}$ pour fabriquer un sismographe ?

Calculs : $1/\sqrt{0,6} = 1,25$, $\sqrt{0,1} \simeq 0,3$

4 Chute d'un téléphone



À l'instant $t = 0$



À l'instant $t > 0$

Un matin, peu réveillé, vous posez votre téléphone en équilibre sur la table de la cuisine. Vous ne pouvez l'empêcher de chuter.
Le portable a une longueur $2L =$ 15 cm et une masse $m =$ 170 g. Il est posé initialement sur la table comme indiqué sur la figure de gauche et il peut pivoter autour de l'arête Oz avant de tomber par terre. La distance OG est notée a avec $a =$ 2,0 cm. Le moment d'inertie J du portable par rapport à l'axe de rotation (Oz) vaut $J_{(Oz)} =$ 4,0 $\times$ 10^{-4} kg.m^2. Nous noterons la force de contact $\overrightarrow{R} = R_r\overrightarrow{u_r} + R_\theta\overrightarrow{u_\theta}$. Le glissement de frottement du portable sur l'arête de la table obéit aux lois de Coulomb avec un coefficient de frottement $f = 0,20$. Ainsi, le portable ne glisse pas sur l'arête tant que $|R_r| < f|R_\theta|$. Nous négligeons tout frottement fluide.

21. Expliquer brièvement pourquoi la position initiale du portable n'est pas une position d'équilibre.

Nous nous intéressons à la première phase du mouvement au cours de laquelle le téléphone pivote sans glisser sur l'arête.

22. Faire un bilan des forces exercées sur le téléphone.
23. Appliquer la loi du moment cinétique au portable par rapport à l'axe Oz. En déduire l'équation différentielle vérifiée par θ.
24. Appliquer la loi de l'énergie cinétique au portable. En déduire une intégrale première du mouvement ($\dot{\theta}$ en fonction de θ).
25. Appliquer la loi de la quantité de mouvement au portable. En déduire des expressions de R_r et R_θ en fonction de θ et des données de l'exercice.
26. Déterminer l'expression de l'angle θ_0 à partir duquel le téléphone commence à glisser sur l'arête, sachant que le téléphone se met à glisser lorsque $|R_r| = f|R_\theta|$. Faire l'application numérique sachant que $\tan(\theta) \simeq \theta$ aux petits angles.

À partir de cet instant pris comme nouvelle origine des temps, le téléphone quitte la table en un temps très bref, conservant quasiment la même orientation θ_0 et la même vitesse angulaire ω_0.

27. Quel est, après avoir quitté la table, la loi d'évolution de la position selon la verticale ($x_G(t)$), où G est le barycentre du téléphone (en supposant que le téléphone ne retouche plus la table) ?
28. Déterminer le temps τ pour lequel le téléphone touche le sol. On considère que la hauteur h de la table est nettement supérieure aux dimensions du téléphone et que la vitesse initiale du téléphone est très faible devant sa vitesse finale.
29. On admet que pendant le vol, la vitesse angulaire du téléphone reste constante, égale à ω_0. Quelle est son expression ? En déduire $\theta(\tau)$. A.N. pour $h =$ 70 cm.
30. De quel côté tombe le téléphone, si on suppose qu'il n'y a pas de rebond ?

***