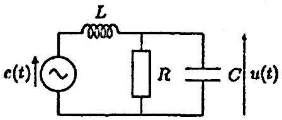
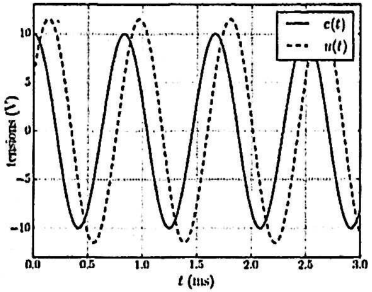
DM Facultatif (correction)

Exercice 1 (revenir à l'essentiel)

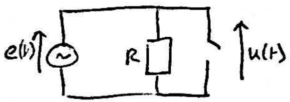
On considère le circuit suivant. On pose $e(t) = E_m \cos(\omega t)$ et $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$.
La figure ci-dessous représente un oscillogramme réalisé à la fréquence $f = 1{,}2.10^3$ Hz, avec $R = 1{,}0\ \text{k}\Omega$ et $C = 0{,}10\ \mu\text{F}$.





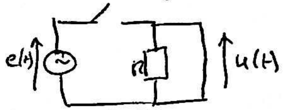
1. Déterminer la valeur de u à basse et haute fréquences en utilisant uniquement les comportements asymptotiques des dipôles.
2. Établir les expressions de U_m et de φ en fonction des composants du circuit.
3. En déduire la valeur numérique de l'inductance L de la bobine.

1. À basse fréquence : Schéma équivalent



$\boxed{u(t) = e(t)}$

À haute fréquence : Schéma équivalent



$\boxed{u(t) = 0}$

2. Détermination de la fonction de transfert :

impédance équivalente au RC parallèle : $\underline{Z_{eq}} = \dfrac{R}{1 + jRC\omega}$

pont diviseur de tension : $\underline{u} = \dfrac{\underline{Z_{eq}}}{\underline{Z_{eq}} + jL\omega}\,\underline{e}$ $\left(\times \dfrac{\frac{1}{Z_{eq}}}{\frac{1}{Z_{eq}}} \right)$

La fonction de transfert s'écrit donc : $\underline{H} = \dfrac{1}{1 + j\frac{L\omega}{R} - LC\omega^2}$

On reconnait $\underline{H} = \dfrac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$ avec $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$, $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, $Q = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}$

On obtient donc $U_m = \dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}} \times E_m$

Et $\varphi = -\dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{Q(x^2-1)}{x}\right)$ (astuce de cours avec $\times \dfrac{-j}{-j}$ de $\underline{H}$)

3. u(t) est en retard d'environ $\dfrac{1}{8}$ de période soit $\varphi \simeq -\dfrac{2\pi}{8}$

On cherche donc $\arctan\left(\dfrac{Q(x^2-1)}{x}\right) \simeq -\dfrac{\pi}{4}$

soit $\dfrac{Q(x^2-1)}{x} = -1$ ou bien $\boxed{x^2 + \dfrac{x}{Q} - 1 = 0}$ (*)

(On prend la solution positive, qui est $x = -\dfrac{1}{2Q} + \dfrac{\sqrt{(1/Q)^2+4}}{2}$) ← pas utile !

$x^2 = 4\pi^2 f^2 LC$, $\dfrac{x}{Q} = \dfrac{2\pi f L}{R}$ donc en utilisant (*) :

$$\boxed{L = \dfrac{1}{4\pi^2 f^2 C + \frac{2\pi f}{R}}}$$

A.N : $L = 7{,}6$ mH

Remarque : avec l'expression (*) injectée dans l'expression de U_m,
on trouve $U_m = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{Q}{x} E_m = \dfrac{R}{\sqrt{2}\, 2\pi f L} E_m$

A.N : $\dfrac{R}{\sqrt{2}\, 2\pi f L} = 1{,}2$

C'est ce qui est observé, l'amplitude U_m est 1,2 fois plus importante que ~~celle de~~ E_m.

Exercice 2 (extrait Banque PT 2021)

Sur la Figure F9 on donne le schéma d'un filtre. On note $\underline{H}_F(\omega)$ sa fonction de transfert.

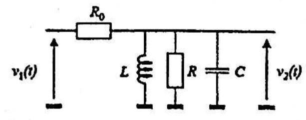


Figure F9. Schéma du filtre.

Q45. Déterminer l'expression de $\underline{H}_F(\omega)$ et la mettre sous la forme $\underline{H}_F = \dfrac{H_0}{1+jQ_F\left[x-\dfrac{1}{x}\right]}$ avec

$x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$, ω_0 étant la pulsation propre du filtre.

Expliciter littéralement Q_F, H_0 et la fréquence caractéristique f_0.

Q46. Donner l'expression reliant le facteur de qualité, la fréquence propre et la bande passante à -3 dB.

On choisit $R_0 = 470\,\Omega$, $R = 120\,\Omega$, $L = 50\,\mu H$ et $C = 50\,nF$ de sorte que : $H_0 \approx 0{,}2$, $f_0 \approx 100$ kHz et $Q_F \approx 3$.

Q47. Faire une représentation graphique approchée du gain en décibel G_{dB} en fonction de $\log(x)$; préciser quelques valeurs sur ce graphe. Faire apparaître sur ce graphe la "bande passante à -3 dB".

Q45 : Impédance équivalente à L, R et C en parallèle :

$$Z_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R} + jC\omega}$$

Pont diviseur de tension : $\underline{v_2} = \dfrac{1}{1+\dfrac{R_0}{\underline{Z_{eq}}}}\underline{v_1}$

Soit $\underline{H_F}(\omega) = \dfrac{1}{1+\dfrac{R_0}{R} + jR_0C\omega - j\dfrac{R_0}{L\omega}}$ (*)

Pour la fonction de transfert canonique, on remarque que $\underline{H_F} = H_0$ réel pour $x = 1$

On utilise cette propriété dans la fonction de transfert précédente :

- $\underline{H_F}(\omega)$ réel pour $jR_0C\omega - j\dfrac{R_0}{L\omega} = 0$

  soit $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ (valeur positive)

  donc $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$ ($x = 1 \Leftrightarrow \omega = \omega_0$) $\rightarrow \boxed{f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$

- $\underline{H_F}(\omega_0) = \boxed{H_0 = \dfrac{R}{R+R_0}}$

Il ne manque plus que Q_F à identifier.

Mettons la fonction de transfert (*) sous forme canonique :

$$\underline{H_F}(\omega) = \frac{H_0}{H_0\left(1+\frac{R_0}{R} + jR_0C\omega_0\frac{\omega}{\omega_0} - j\frac{R_0}{L\omega_0}\frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

$$= \frac{H_0}{1 + jR'\sqrt{\frac{C}{L}}\,x - jR'\sqrt{\frac{C}{L}}\,\frac{1}{x}} \quad \text{avec } \boxed{R' = \frac{RR_0}{R+R_0}}$$

Soit $\boxed{Q_F = R'\sqrt{\dfrac{C}{L}}}$

Q46. On cherche les fréquences de coupures.

On peut montrer que le maximum est en $x = 1$ où $|\underline{H_F}| = H_0$

Il faut donc chercher x_c tel que $|\underline{H_F}(x_c)| = \dfrac{H_0}{\sqrt{2}}$ (équivalent à "-3dB")

Soit $Q_F\left(x_c - \dfrac{1}{x_c}\right) = \pm 1$ ou $\boxed{x_c^2 \mp \dfrac{1}{Q_F}x_c - 1 = 0}$

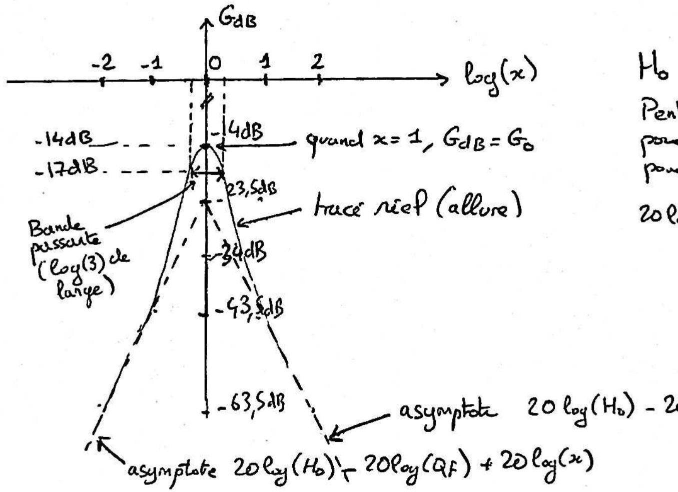
Les deux équations ont le même discriminant : $\Delta = \dfrac{1}{Q_F^2} + 4$

Les quatres solutions sont : $x_{c_1} = \dfrac{1}{2Q_F} + \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2}$ $\quad x_{c_3} = -\dfrac{1}{2Q_F} + \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2}$

$x_{c_2} = \dfrac{1}{2Q_F} - \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2}$ $\quad x_{c_4} = -\dfrac{1}{2Q_F} - \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2}$

Seulement deux sont positives, x_{c_1} et x_{c_3}. On a donc une largeur de bande passante $\omega_0 \times (x_{c_1} - x_{c_3}) = \boxed{\dfrac{\omega_0}{Q_F}}$

Q47.



$H_0 = 0{,}2 \Rightarrow G_0 \simeq -14$ dB

Pentes de +20dB/décades pour $f \ll f_0$ et -20dB/décades pour $f \gg f_0$

$20\log(Q_F) \simeq -9{,}5$ dB

Exercice 3 (un classique de cinématique)

On modélise un ballon sonde par un point matériel de coordonées $(x(t), z(t))$. Le ballon est lâché depuis le point O à l'instant $t = 0$. Il acquiert quasi-instantanément une vitesse verticale v_0 qui demeure constante tout au long du mouvement. Le vent lui communique une vitesse horizontale $v_x > 0$, orientée suivant l'axe (Ox), et proportionnelle à son altitude $z > 0$ mesurée par rapport au niveau du sol : $v_x = z/\tau$ où $\tau > 0$ est homogène à un temps.

1 - Écrire et résoudre l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$.

2 - Écrire et résoudre l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$, à exprimer en fonction de v_0 et τ.

3 - En déduire l'équation $z(x)$ de la trajectoire du ballon sonde.

4 - Représenter cette trajectoire, et représenter le vecteur vitesse du ballon sonde à trois instants différents.

5 - Exprimer les composantes de l'accélération du ballon sonde.

1. Pour le mouvement vertical, $\frac{dz}{dt} = v_0$ (équation différentielle simple !). La solution est trouvée en intégrant :

$$z(t) = v_0 t + 0 \leftarrow \text{position initiale du ballon suivant } (Oz)$$

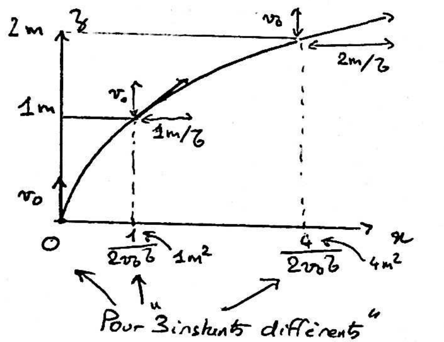
2. Pour le mouvement horizontal : $\frac{dx}{dt} = \frac{v_0 t}{\tau}$ en utilisant la réponse précédente, soit en intégrant :

$$x(t) = \frac{v_0 t^2}{2\tau} + 0 \leftarrow \text{position initiale du ballon suivant } (Ox)$$

3. On remarque que $\boxed{x = \frac{z^2}{2 v_0 \tau}}$ qui est l'équation de la trajectoire $x(z)$

Pour $z(x)$: $z = \sqrt{2 v_0 \tau x}$ en considérant $x > 0$.

4.



5. Accélération verticale nulle car vitesse verticale constante.

Accélération horizontale $\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{v_0}{\tau}}$ d'après 2.